# MODIFIKASI METODE HALLEY BERDASARKAN METODE OSADA DAN EULER CHEBYSHEV UNTUK AKAR GANDA

**Romendiana[1*], Bustami[2]**

[1] Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
[2] Laboratorium Matematika Terapan, Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

*romendiana@yahoo.com

## ABSTRACT

In this article discusses the modification of Halley's method to solve nonlinear equations having multiple roots. The method is obtained using improvements of the Osada's method and Euler-Chebyshev's method. Analytically, we show that this iterative method have third order for a multiple roots. Furthermore, numerical experiments show that, the modification of Halley method is superior to Newton's method for multiple roots.

Keywords: *Newton's method for multiple roots, iterative method, nonlinear equation, order of convergence*

## ABSTRAK

Pada artikel ini dibahas modifikasi metode Halley untuk menyelesaikan persamaan nonlinear berakar ganda. Metode ini diturunkan dengan mengunakan koreksi aproksimasi metode Osada dan metode Euler Chebyshev. Secara analitik ditunjukkan metode iterasi ini memiliki kekonvergenn orde tiga untuk akar ganda. Contoh komputasi mendukung hasil analitik yang didapat. Selanjutnya dari uji komputasi numerik ditunjukkan bahwa modifikasi metode Halley ini lebih unggul dibanding dengan metode Newton untuk akar ganda.

Kata kunci: *metode Newton untuk akar ganda, metode iterasi, persamaan nonlinear, orde konvergensi.*

## 1. PENDAHULUAN

Salah satu persoalan matematika yang sering dijumpai adalah bagaimana menemukan solusi dari persamaan nonlinear

$$f(x) = 0. \tag{1}$$

Solusi dari persamaan (1) tidak selalu berbentuk akar sederhana (*simple root*), ada juga yang merupakan akar ganda (*multiple roots*) dengan multiplisitas $m$ dengan $m > 1$. Salah satu metode numerik yang sering digunakan untuk menemukan solusi dari persamaan (1) adalah metode Newton [1, h. 68] dengan bentuk iterasi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad f'(x_n) \neq 0 \quad \text{dan} \quad n = 0, 1, 2, \cdots. \tag{2}$$

Penggunaan metode Newton pada persamaan (2) apabila dipakai untuk mendapatkan akar ganda menghasilkan kekonvergenan sangat lambat dan tingkat kesalahannya besar [2, h. 78]. Selanjutnya untuk mengatasi kelemahan metode Newton untuk akar sederhana perlu dimodifikasi, dengan tujuan untuk mempercepat iterasi dan memperkecil tingkat kesalahannya (*error*). Lalu, diperoleh modifikasi metode Newton yaitu

$$x_{n+1} = x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad f'(x_n) \neq 0 \tag{3}$$

dengan bilangan multiplisitas akar $m$. Persamaan (3) merupakan metode Newton untuk akar ganda [6, h.354]. Metode ini juga masih lambat dalam menemukan akar disebabkan karena kekonvergan dari metode Newton untuk akar ganda adalah kuadratik sehingga ada beberapa metode yang memiliki kekonvergenan orde tiga untuk akar ganda yaitu metode Halley untuk akar ganda yang dapat dinyatakan dengan [5]

$$x_{(n+1)} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{m+1}{2m}f'(x_n) - \frac{f(x_n)f''(x_n)}{2f'(x_n)}}. \tag{4}$$

Metode Osada untuk akar ganda dengan kekonvergenan orde tiga dapat dinyatakan dengan [5]

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}m(1+m)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + \frac{1}{2}(m-1)^2\frac{f'(x_n)}{f''(x_n)}, \tag{5}$$

dan metode Euler-Chebyshev untuk akar ganda dengan kekonvergenan orde tiga dapat dinyatakan dengan [3]

$$x_{n+1} = x_n - \frac{m(3-m)}{2}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{m^2}{2}\frac{f(x_n)^2 f''(x_n)}{f'(x_n)^3}. \tag{6}$$

Pada artikel ini di bagian dua dibahas modifikasi metode Halley untuk akar ganda yang memiliki kekonvergenan orde tiga yang merupakan review dari artikel yang dikembangkan oleh Neta [4], dengan judul "*A third-order modification of Newton's method for multiple roots*", kemudian dilanjutkan di bagian tiga dengan melakukan analisa kekonvergenan dan di bagian empat dilakukan uji komputasi

## 2. MODIFIKASI METODE HALLEY UNTUK AKAR GANDA

Proses untuk mendapatkan modifikasi metode Halley untuk akar ganda dimulai dengan menggunakan perbaikan dari metode Osada pada persamaan (5) dan metode Euler-Chebyshev pada persamaan (6) yaitu [4]

$$-\frac{1}{2}m(m+1)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}+\frac{1}{2}(m-1)^2\frac{f'(x_n)}{f''(x_n)}\approx -\frac{m(3-m)}{2}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}-\frac{m^2}{2}\frac{f(x_n)^2f''(x_n)}{f'(x_n)^3}. \tag{7}$$

Kemudian dengan menyederhanakan persamaan (7) diperoleh aproksimasi baru yaitu

$$\frac{f(x_n)f''(x_n)}{2f'(x_n)}\approx\frac{m-1}{m}f'(x_n)-\frac{(m-1)^2}{2m^2}\frac{f'(x_n)^3}{f(x_n)f''(x_n)}. \tag{8}$$

Dengan mensubstitusi persamaan(8) ke persamaan (4) diperoleh

$$x_{n+1}=x-\frac{f(x_n)2m^2(f(x_n))f''(x_n)}{m(3-m)f'(x_n)f''(x_n)f(x_n)+(m-1)^2f'(x_n)^3}. \tag{9}$$

Persamaan (9) merupakan modifikasi metode Halley untuk akar ganda.

## 3. ANALISA KEKONVERGENAN

**Teorema 1** Misalkan $x^* \in I$ adalah akar ganda bermultiplisitas $m$ dari suatu fungsi yang mempunyai turunan secukupnya $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ untuk suatu interval buka $I$. Jika $x_0$ cukup dekat ke $x^*$, maka metode yang didefinisikan pada persamaan (9) memiliki orde kekonvergenan kubik dan mempunyai persamaan *error* yaitu

$$e_{n+1}=\frac{(m^2+3)C_1^2-2m(m-1)C_2}{2m^2(m-1)}e_n^3+O(e_n^4),$$

dengan $e_n = x_n - x^*$ dan $C_j=\dfrac{m!}{(m+j)!}\dfrac{f^{(m+j)}(x^*)}{f^{(m)}(x^*)},\;\; j=1,2,3.$

**Bukti.**
Misalkan $x^*$ adalah akar ganda dari persamaan $f(x) = 0$ dengan multiplisitas $m$ sehingga berdasarkan definisi orde konvergensi maka $f(x^*) = 0, f'(x^*) = 0, f''(x^*) = 0, \cdots, f^{(m-1)}(x^*) = 0$ dan $f^{(m)}(x^*) \neq 0$. Asumsikan $e_n = x_n - x^*$, kemudian dengan mengekspansikan $f(x_n)$ dan $f'(x_n)$ menggunakan Deret Taylor di sekitar $x_n = x^*$ sampai $m + 3$ dan mengabaikan orde yang lebih tinggi maka diperoleh

$$f(x_n)=\frac{f^{(m)}(x^*)}{m!}e_n^m\left(1+C_1e_n+C_2e_n^2+C_3e_n^3+O(e_n^4)\right). \tag{10}$$

$$f'(x_n) = \frac{f^{(m)}(x^*)}{m-1!} e_n^{m-1} \left( 1 + \frac{m+1}{m} C_1 e_n + \frac{m+2}{m} C_2 e_n^2 + \frac{m+3}{m} C_3 e_n^3 + O(e_n^4) \right). \tag{11}$$

Kemudian persamaan (10) dikuadratkan sehingga diperoleh

$$(f(x_n))^2 = \frac{(f^{(m)}(x^*))^2}{(m!)^2} e_n^{2m} \left(1 + 2C_1 e_n + \left(2C_2 + C_1^2\right) e_n^2 + (2C_1C_2 + 2C_3) e_n^3 + O(e_n^4)\right). \tag{12}$$

Selanjutnya $(f'(x_n))^3$ dihitung menggunakan persamaan (11), lalu diperoleh

$$\begin{aligned}(f'(x_n))^3 =& \frac{(f^{(m)}(x^*))^3 e_n^{3m} m^3}{(m!)^3 e_n^3} \Bigg( 1 + \frac{3m+3}{m} C_1 e_n + \bigg( \frac{3m^2+6m+3}{m^2} C_1^2 \\ &+ \frac{3m+6}{m} C_2 \bigg) e_n^2 + \bigg( \frac{3m+9}{m} C_3 + \frac{6m^2+18m+12}{m^2} C_1 C_2 \\ &+ \frac{m^3+m^2+3m+1}{m^3} C_1^3 \bigg) e_n^3 + O(e_n^4) \Bigg).\end{aligned} \tag{13}$$

Kemudian dilakukan ekspansi Taylor dari $f''(x_n)$ di sekitar $x_n = x^*$ sampai $m+2$ dan mengabaikan orde yang lebih tinggi maka diperoleh

$$\begin{aligned}f''(x_n) = \frac{f^{(m)}(x^*)}{(m-2)!} e_n^{m-2} \Bigg( 1 + \frac{m+1}{m-1} C_1 e_n + \frac{(m+2)(m+1)}{m(m-1)} C_2 e_n^2 \\ + \frac{(m+3)(m+2)}{m(m-1)} C_3 e_n^3 + O(e_n^4) \Bigg).\end{aligned} \tag{14}$$

Jika persamaan (12) dikali dengan persamaan (14) diperoleh

$$\begin{aligned}(f(x_n))^2 f''(x_n) =& \frac{(f^{(m)}(x^*))^3 e_n^{3m} m(m-1)}{(m!)^3 e_n^2} \Bigg( 1 + \frac{3m-1}{m-1} C_1 e_n + \bigg( \frac{3m^2+m+2}{m(m-1)} C_2 \\ &+ \frac{3m+1}{m-1} C_1^2 \bigg) e_n^2 + \bigg( \frac{3m^2+3m+6}{m(m-1)} C_3 + \frac{6m^2+6m+4}{m(m-1)} C_1 C_2 \\ &+ \frac{(m+1)^3}{m-1} C_1^3 \bigg) e_n^3 + O(e_n^4) \Bigg).\end{aligned} \tag{15}$$

Kemudian persamaan (10) dikali dengan persamaan (11) dan persamaan (14), lalu didapat

$$\begin{aligned}f(x_n)f'(x_n)f''(x_n) =& \frac{(f^{(m)}(x^*))^3 e_n^{3m} m^2(m-1)}{(m!)^3 e_n^3} \Bigg( 1 + \frac{3m^2-1}{m(m-1)} C_1 e_n \\ &+ \left( \frac{3m^2+3m}{m(m-1)} C_2 + \frac{3m^2+3m}{m(m-1)} C_1^2 \right) e_n^2 \\ &+ \bigg( \frac{3m^2+6m+3}{m(m-1)} C_3 + \frac{6m^3+12m^2+6m+2}{m^2(m-1)} C_1 C_2 \\ &+ \frac{m^2+2m+1}{m(m-1)} C_1^3 \bigg) e_n^3 + O(e_n^4) \Bigg).\end{aligned} \tag{16}$$

Jika persamaan (15) dikali dengan $2m^2$ diperoleh

$$\begin{aligned}
2m^2(f(x_n))^2 f''(x_n) =& \frac{(f^{(m)}(x^*))^3 e_n^{3m} m(m-1)}{(m!)^3 e_n^2}\Bigg(2m^2 + \frac{6m^3-2m^2}{m-1}C_1 e_n \\
&+ \left(\frac{6m^3+2m^2}{m-1}C_1^2 + \frac{6m^3+2m^2+4m}{m-1}C_2\right)e_n^2 \\
&+ \Bigg(\frac{6m^3+6m^2+12m}{m-1}C_3 + \frac{12m^3+12m^2+8m}{m-1}C_1C_2 \\
&+ \frac{2m^3+2m^2}{m-1}C_1^3\Bigg)e_n^3 + O(e_n^4)\Bigg). \qquad (17)
\end{aligned}$$

Jika persamaan (16) dikali dengan $m(3-m)$ diperoleh

$$\begin{aligned}
&m(3-m)f(x_n)f'(x_n)f''(x_n) \\
&\quad = \frac{(f^{(m)}(x^*))^3 e_n^{3m} m^2(m-1)}{(m!)^3 e_n^3}\Bigg((-m^2+3m) + \frac{-3m^3+9m^2+m-3}{m-1}C_1 e_n \\
&\quad + \left(\frac{-3m^3+6m^2+9m}{m-1}C_2 + \frac{-3m^3+6m^2+9m}{m-1}C_1^2\right)e_n^2 \\
&\quad + \Bigg(\frac{-6m^4+6m^3+30m^2+16m+6}{m(m-1)}C_1C_2 + \frac{-3m^3+3m^2+15m+9}{m-1}C_3 \\
&\quad + \frac{-m^3+m^2+5m+3}{m-1}C_1^3\Bigg)e_n^3 + O(e_n^4)\Bigg). \qquad (18)
\end{aligned}$$

Kemudian dengan mengalikan $(m-1)^2$ ke persamaan (13) diperoleh

$$\begin{aligned}
(f'(x_n))^3(m-1)^2 =& \frac{(f^{(m)}(x^*))^3 e_n^{3m} m^3}{(m!)^3 e_n^3}\Bigg((m^2-2m+1) + \frac{3m^3-3m^2-3m+3}{m}C_1 e_n \\
&+ \left(\frac{3m^4-6m^2+3}{m^2}C_1^2 + \frac{3m^3-9m+6}{m^2}C_2\right)e_n^2 \\
&+ \Bigg(\frac{6m^4+6m^3-18m^2-6+12}{m^2}C_1C_2 \\
&+ \frac{3m^3+3m^2-15m+9}{m}C_3 \\
&+ \frac{m^5+m^4-2m^3-2m^2+m+1}{m}C_1^3\Bigg)e_n^3 + O(e_n^4)\Bigg). \qquad (19)
\end{aligned}$$

Selanjutnya dengan menjumlahkan persamaan (18) dengan persamaan (19) maka diperoleh

$$\begin{aligned}
&m(3-m)f(x_n)f'(x_n)f''(x_n)+(m-1)^2(f'(x_n))^3\\
&\quad=\frac{(f^{(m)}(x^*))^3e_n^{3m}}{(m!)^3e_n^2}\frac{1}{e_n}m(2m^3-2m^2)\Bigg(1+\frac{3m-1}{m-1}C_1e_n+\Bigg(\frac{6m^3+3m^2+3}{2m^2(m-1)}C_1^2\\
&\qquad+\frac{3m^2+3}{m(m-1)}C_2\Bigg)e_n^2+\Bigg(\frac{3m^2+9}{m(m-1)}C_3+\frac{6m^3+6m^2+5m+9}{m^2(m-1)}C_1C_2\\
&\qquad+\frac{3m^3+m^2+2m^4+m+1}{2m^3(m-1)}C_1^3\Bigg)e_n^3+O(e_n^4)\Bigg). \qquad (20)
\end{aligned}$$

Selanjutnya jika persamaan (17) dibagi dengan persamaan (20) diperoleh

$$\begin{aligned}
&\frac{2m^2(f(x_n))^2f''(x_n)}{m(3-m)f(x_n)f'(x_n)f''(x_n)+(m-1)^2(f'(x_n))^3}\\
&=\frac{e_n(m-1)}{2m^3-2m^2}\Bigg(2m^2+\frac{6m^3-2m^2}{m-1}C_1e_n\Bigg(\frac{6m^3+2m^2+4m}{m-1}C_2\\
&\quad+\frac{6m^3+2m^2}{m-1}C_1^2\Bigg)e_n^2+\Bigg(\frac{6m^3+6m^2+12m}{m-1}C_3+\frac{12m^3+12m^2+8m}{m-1}C_1C_2\\
&\quad+\frac{2m^3+2m^2}{m-1}C_1^3\Bigg)e_n^3+O(e_n^4)\Bigg)\Bigg(1+\frac{3m-1}{m-1}C_1e_n+\Bigg(\frac{6m^3+3m^2+3}{2m^2(m-1)}C_1^2\\
&\quad+\frac{3m^2+3}{m(m-1)}C_2\Bigg)e_n^2+\Bigg(\frac{3m^2+9}{m(m-1)}C_3+\frac{6m^3+6m^2+5m+9}{m^2(m-1)}C_1C_2\\
&\quad+\frac{3m^3+m^2+2m^4+m+1}{2m^3(m-1)}C_1^3\Bigg)e_n^3+O(e_n^4)\Bigg)^{-1}. \qquad (21)
\end{aligned}$$

Selanjutnya untuk menyelesaikan persamaan (21) digunakan deret geometri yaitu

$$\frac{1}{1+r}=1-r+r^2-r^3+r^4-r^5+...+O(r^n). \qquad (22)$$

dengan

$$\begin{aligned}
r=&\frac{3m-1}{m-1}C_1e_n+\left(\frac{6m^3+3m^2+3}{2m^2(m-1)}C_1^2\frac{3m^2+3}{m(m-1)}C_2\right)e_n^2+\left(\frac{3m^2+9}{m(m-1)}C_3\right.\\
&\left.+\frac{6m^3+6m^2+5m+9}{m^2(m-1)}C_1C_2+\frac{3m^3+m^2+2m^4+m+1}{2m^3(m-1)}C_1^3\right)e_n^3+O(e_n^4), \qquad (23)
\end{aligned}$$

maka diperoleh

$$\begin{aligned}
&\frac{2m^2(f(x_n))^2f''(x_n)}{m(3-m)f(x_n)f'(x_n)f''(x_n)+(m-1)^2(f'(x_n))^3}\\
&\quad=e_n+\left(\frac{-(3+m^2)C_1^2+(2m^2-2m)C_2}{2m^2(m-1)}+O(e_n^4)\right). \qquad (24)
\end{aligned}$$

Kemudian dengan mensubstitusikan persamaan (24) ke persamaan (9) diperoleh

$$x_{n+1} = x_n - \left( e_n + \left( -\frac{(m^2+3)C_1^2 + 2m(m-1)C_2}{2m^2(m-1)} \right) e_n^3 + O(e_n^4) \right).$$

Selanjutnya karena $e_{n+1} = x_{n+1} - x^*$ dan $e_n = x_n - x^*$ maka diperoleh

$$e_{n+1} = \left( \frac{(m^2+3)C_1^2 - 2m(m-1)C_2}{2m^2(m-1)} \right) e_n^3 + O(e_n^4). \qquad (25)$$

Persamaan (25) merupakan persamaan galat untuk modifikasi metode Halley untuk akar ganda. Dari Teorema 1 terbukti bahwa modifikasi metode Halley untuk akar ganda memiliki kekonvergenan orde tiga. ■

## 4. UJI KOMPUTASI

Berikut ini dilakukan uji komputasi untuk membandingkan banyak iterasi dari metode Newton (MN), metode Halley (MH), metode Osada (MO), metode Euler-Chebyshev (MEC), metode Baru(MC), dan metode MMH dalam menemukan akar dari persamaan nonlinear berakar ganda. Dalam melakukan perbandingan ini, persamaan nonlinear yang digunakan adalah:

| | |
|---|---|
| $f_1(x) = (x^3 + 4x^2 - 10)^3$ | $\alpha = 1.365230013414096845760806829$ |
| $f_2(x) = (\sin^2 x - x^2 + 1)^2$ | $\alpha = 1.404491648215341226035086817$ |
| $f_3(x) = (x^2 - e^x - 3x + 2)^5$ | $\alpha = 0.257530285439860760455367304$ |
| $f_4(x) = (\cos x - x)^3$ | $\alpha = 0.739085133215160641655312087$ |
| $f_5(x) = ((x-1)^3 - 1)^6$ | $\alpha = 2$ |
| $f_6(x) = (xe^{x^2} - \sin^2 x + 3\cos x + 5)^4$ | $\alpha = -1.207647827130918927009416$7 |
| $f_7(x) = (\sin x - \frac{x}{2})^2$ | $\alpha = 1.895494267033980947144035738$ |

Dalam menemukan solusi numerik dari contoh-contoh fungsi di atas, digunakan program Maple 13 dengan memakai 128 digits dan toleransi $\varepsilon = 10^{-32}$, dengan menggunakan tebakan awal yang sama untuk masing-masing fungsi yang telah diberikan. Dalam menemukan solusi numerik juga ditentukan kriteria pemberhentian jalannya program komputasi yang sama untuk semua metode, yaitu jika selisih nilai mutlak antara dua iterasi yang berdekatan bernilai lebih kecil dari toleransi yang diberikan, atau jika nilai mutlak fungsi lebih kecil dari toleransi yang diberikan, atau jika jumlah iterasi mencapai maksimum iterasi.

Tabel 1: Perbandingan Komputasi untuk MN, MH, MO, MEC, dan MMH

| $f_i$ | $x_0$ | Metode | $n$ | $\|f(x_n)\|$ | $\|x_n - x_{n-1}\|$ | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_1$ | 2.0 | MN | 5 | $8.49e-54$ | $5.02e-10$ | 1.3652300134140968 |
| | | MH | 3 | $7.06e-49$ | $3.10e-06$ | 1.3652300134140969 |
| | | MO | 3 | $6.47e-33$ | $1.19e-04$ | 1.3652300134152258 |
| | | MEC | 3 | $4.01e-38$ | $3.66e-05$ | 1.3652300134141176 |
| | | MMH | 3 | $4.01e-38$ | $3.66e-05$ | 1.3652300134141176 |
| | 1.0 | MN | 5 | $4.91e-62$ | $2.12e-11$ | 1.3652300134140968 |
| | | MH | 3 | $3.38e-57$ | $3.69e-07$ | 1.3652300134140968 |
| | | MO | 4 | $5.40e-84$ | $2.52e-10$ | 1.3652300134152258 |
| | | MEC | 3 | $1.94e-38$ | $3.38e-05$ | 1.3652300134140806 |
| | | MMH | 3 | $1.94e-38$ | $3.38e-05$ | 1.3652300134140806 |
| $f_2$ | 2.3 | MN | 6 | $7.31e-52$ | $1.17e-13$ | 1.4044916482153412 |
| | | MH | 4 | $4.84e-57$ | $3.76e-10$ | 1.4044916482153412 |
| | | MO | 4 | $2.07e-38$ | $2.90e-07$ | 1.4044916482153412 |
| | | MEC | 4 | $1.73e-47$ | $1.13e-08$ | 1.4044916482153412 |
| | | MMH | 4 | $4.55e-42$ | $7.88e-08$ | 1.4044916482153412 |
| | 2.0 | MN | 6 | $5.11e-64$ | $1.07e-16$ | 1.4044916482153412 |
| | | MH | 4 | $7.43e-77$ | $1.87e-13$ | 1.4044916482153412 |
| | | MO | 4 | $3.53e-51$ | $2.16e-09$ | 1.4044916482153412 |
| | | MEC | 4 | $1.53e-63$ | $2.40e-11$ | 1.4044916482153412 |
| | | MMH | 4 | $4.09e-56$ | $3.59e-10$ | 1.4044916482153412 |
| $f_3$ | 0.0 | MN | 3 | $1.03e-55$ | $5.34e-06$ | 0.2575302854263488 |
| | | MH | 2 | $1.68e-53$ | $5.34e-04$ | 0.2575302854324861 |
| | | MO | 2 | $5.83e-62$ | $1.62e-04$ | 0.2575302854397108 |
| | | MEC | 2 | $4.31e-58$ | $2.82e-04$ | 0.2575302854389701 |
| | | MMH | 2 | $1.71e-55$ | $4.06e-04$ | 0.2575302854369115 |
| | 1.0 | MN | 3 | $3.46e-52$ | $1.20e-05$ | 0.2575302854263488 |
| | | MH | 3 | $1.39e-85$ | $3.88e-06$ | 0.2575302854398608 |
| | | MO | 3 | $2.01e-91$ | $1.76e-06$ | 0.2575302854398608 |
| | | MEC | 3 | $2.24e-89$ | $2.31e-06$ | 0.2575302854398608 |
| | | MMH | 3 | $1.93e-87$ | $3.01e-06$ | 0.2575302854398608 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_4$ | 1.7 | MN | 4 | $6.04e-47$ | $3.25e-08$ | 0.7390851332151609 |
| | | MH | 3 | $9.12e-43$ | $3.68e-05$ | 0.7390851332151664 |
| | | MO | 3 | $1.17e-39$ | $6.66e-05$ | 0.7390851332152237 |
| | | MEC | 3 | $5.25e-41$ | $5.14e-05$ | 0.7390851332151830 |
| | | MMH | 3 | $5.25e-41$ | $5.14e-05$ | 0.7390851332151830 |
| | 1.0 | MN | 4 | $1.22e-60$ | $1.70e-10$ | 0.7390851332151606 |
| | | MH | 3 | $1.78e-85$ | $6.62e-10$ | 0.7390851332151606 |
| | | MO | 3 | $1.42e-78$ | $3.15e-09$ | 0.7390851332151606 |
| | | MEC | 3 | $1.43e-81$ | $1.60e-09$ | 0.7390851332151606 |
| | | MMH | 3 | $1.43e-81$ | $1.60e-09$ | 0.7390851332151606 |
| $f_5$ | 3.0 | MN | 5 | $2.70e-45$ | $1.11e-04$ | 2.0000000124431812 |
| | | MH | 3 | $7.44e-45$ | $2.80e-03$ | 2.0000000147291770 |
| | | MO | 4 | $3.12e-85$ | $1.09e-05$ | 2.0000000000000027 |
| | | MEC | 4 | $1.89e-94$ | $3.63e-06$ | 2.0000000000000001 |
| | | MMH | 3 | $3.55e-37$ | $6.43e-03$ | 2.0000002805364084 |
| | $-1.0$ | MN | 9 | $5.23e-49$ | $5.46e-05$ | 2.0000000029921802 |
| | | MH | 10 | $2.22e-65$ | $2.03e-04$ | 2.0000000000055900 |
| | | MO | 23 | $7.70e-44$ | $2.19e-03$ | 2.0000000217456600 |
| | | MEC | 22 | $1.87e-52$ | $7.82e-04$ | 2.0000000007975918 |
| | | MMH | 4 | $2.67e-77$ | $3.78e-05$ | 1.9999999999999424 |
| $f_6$ | $-2.0$ | MN | 7 | $5.60e-37$ | $5.32e-06$ | $-1.2076478271735310$ |
| | | MH | 4 | $1.60e-61$ | $4.96e-06$ | $-1.2076478271309190$ |
| | | MO | 5 | $5.09e-45$ | $4.69e-05$ | $-1.2076478271313350$ |
| | | MEC | 5 | $3.21e-64$ | $1.37e-06$ | $-1.2076478271309189$ |
| | | MMH | 5 | $2.83e-82$ | $4.86e-08$ | $-1.2076478271309189$ |
| | $-1.0$ | MN | 5 | $5.61e-60$ | $7.10e-09$ | $-1.2076478271309190$ |
| | | MH | 2 | $4.75e-35$ | $7.99e-04$ | $-1.2076478270015907$ |
| | | MO | 4 | $1.56e-103$ | $6.24e-10$ | $-1.2076478271309189$ |
| | | MEC | 3 | $1.47e-47$ | $3.37e-05$ | $-1.2076478271308225$ |
| | | MMH | 3 | $9.70e-58$ | $5.38e-06$ | $-1.2076478271309187$ |
| $f_7$ | 1.7 | MN | 5 | $3.80e-57$ | $1.14e-14$ | 1.8954942670339809 |
| | | MH | 3 | $7.40e-47$ | $2.97e-08$ | 1.8954942670339809 |
| | | MO | 4 | $1.81e-76$ | $2.27e-13$ | 1.8954942670339809 |
| | | MEC | 3 | $1.01e-37$ | $8.09e-07$ | 1.8954942670339809 |
| | | MMH | 4 | $1.03e-92$ | $4.88e-16$ | 1.8954942670339809 |
| | 2.0 | MN | 4 | $2.09e-40$ | $1.74e-10$ | 1.8954942670339809 |
| | | MH | 3 | $1.55e-65$ | $2.29e-11$ | 1.8954942670339809 |
| | | MO | 3 | $3.45e-53$ | $1.72e-09$ | 1.8954942670339809 |
| | | MEC | 3 | $1.67e-59$ | $1.89e-10$ | 1.8954942670339809 |
| | | MMH | 3 | $8.23e-56$ | $6.89e-10$ | 1.8954942670339809 |

Secara umum berdasarkan Tabel 1 dapat dilihat bahwa semua metode berhasil dalam menemukan akar yang diharapkan untuk tebakan awal yang berbeda. Akan tetapi nilai tebakan awal $x_0$ mempunyai pengaruh terhadap jumlah iterasi. Berdasarkan Tabel 1 jumlah iterasi dari MH, MO, MEC, MMH, tidak mengalami perbedaan yang signifikan, hal ini terjadi karena orde konvergensi dari masing-masing metode sama yaitu kekonvergenan orde tiga. Namun untuk fungsi ke lima dengan tebakan awal $x_0 = -1.0$ modifikasi metode Halley mengalami perbedaan yang sangat signifikan dengan MH, MO, MEC, MMH. Hal ini disebabkan karena pemilihan tebakan awal yang jauh dari akar, sebenarnya menyebabkan jumlah iterasi yang diperlukan untuk menghampiri akar akan semakin banyak, tetapi untuk tebakan awal tertentu akan menyebabkan iterasi sedikit. Contohnya terlihat pada fungsi yang kelima dengan tebakan awal $x_0 = -1.0$ dengan akar $x^* = 2$ dengan menggunakan modifikasi metode Halley untuk akar ganda memiliki iterasi yang sedikit dibandingkan dengan keempat metode lainnya.

Berdasarkan Tabel 1 MH, MO, MEC, mempunyai keunggulan jumlah iterasi dan jumlah perhitungan fungsi pada setiap fungsi yang berbeda, tetapi secara umum modifikasi metode Halley lebih unggul. Selanjutnya dapat disimpulkan bahwa modifikasi metode Halley jauh lebih unggul dibandingkan dengan metode Newton untuk akar ganda untuk semua fungsi, dikarenakan metode Newton memiliki kekonvergenan orde dua sedangkan modifikasi metode Halley memiliki kekonvergenan orde tiga.

## UCAPAN TERIMAKASIH

diucapkan terimakasih kepada Dr. Imran M., M.Sc. yang telah memberikan arahan dan bimbingan dalam penulisan artikel ini.

## DAFTAR PUSTAKA

[1] Atkinson, K. E. 1993. *Elementary Numerical Analysis, $2^{nd}$ Ed.* John Wiley & Sons, Inc., New York.

[2] Mathews, J. H. 1987. *Numerical Methods for Mathematics Science and Engineering*, $2^{nd}$ Ed. Prentice Hall, Inc., New Jersey.

[3] Neta, B. 2008. New third order nonlinear solver for multiple roots, *Applied Mathematics and Computation*. **202**: 162–170.

[4] Neta, B. 2009. A third order modification of Newton's method for multiple roots, *Applied Mathematics and Computation*. **211**: 474–479.

[5] Osada, N. 2007. Chebyshev-Halley method for anaytic functions, *Applied Mathematics and Computation*. **167**: 1–22.

[6] Ralston, A. & P. Rabinowitz. 1978. *A First course in Numerical Analysis*. McGraw-Hill, New York.